

Calcul L pour les séquents

Guillaume MM

GdT Logique

9 février 2012*

Je pars de la notion de machines pour le lambda-calcul donnée dans mon dernier exposé pour introduire et motiver le calcul « L » comme représentation des preuves en calcul des séquents intuitionniste et classique.

1 Machines pour la logique intuitionniste, rappels

La dernière fois, on s'est intéressé à un λ -calcul minimaliste en appel par nom et avec paires et sommes, dont la sémantique intuitive est la suivante :

$$\begin{aligned}(\lambda x.t)u &\rightarrow t [u/x] \\ \pi_1(t,u) &\rightarrow t \\ \pi_2(t,u) &\rightarrow u \\ \text{match}(1,t) \text{ with } [u|v] &\rightarrow u t \\ \text{match}(2,t) \text{ with } [u|v] &\rightarrow v t \\ &\dots\end{aligned}$$

L'un des problèmes était de définir la réduction de :

$$\text{match}(\lambda x.t)u \text{ with } [v|w],$$

ou plus généralement d'un terme $E[t]$ où t est une expression réductible au sens des règles ci-dessus (ici, $E[\] = \text{match}[\] \text{ with } [v|w]$ et $t = (\lambda x.t)u$).

On appelle $E[\]$ le *contexte de réduction*, qui est une expression dans laquelle le « trou » $[\]$ apparaît une fois et une seule. Lui non plus ne doit pas être quelconque : par exemple, il faut faire attention à ne pas réduire $(\lambda x.t)u$ dans $v((\lambda x.t)u)$.

*Version du 24 avril 2012.

On rencontre couramment dans la littérature l'idée de définir la réduction par passage au contexte. Cela revient à définir formellement la réduction telle que si $t \rightarrow u$ alors $E[t] \rightarrow E[u]$, pour une certaine définition formelle des expressions à trou $E[\]$ (qui prendra soin à inclure $\text{match } [\] \text{ with } [v|w]$ et à exclure $\lambda x. [\]$).

Cependant ce n'est pas entièrement satisfaisant : ainsi, on ne trouvera pas de contexte permettant la réduction de l'application suivante :

$$\left(\text{match } x \text{ with } [\lambda y \lambda z. t \mid \lambda y \lambda z. u] \right) z$$

alors que son sens est très proche du terme suivant :

$$\text{match } x \text{ with } [\lambda y. (\lambda z. t)z \mid \lambda y. (\lambda z. u)z]$$

soit, après réduction à l'intérieur des branches :

$$\text{match } x \text{ with } [\lambda y. t \mid \lambda y. u]$$

Les informaticiens intéressés par l'équivalence contextuelle des termes doivent introduire à la main les équations identifiant ces deux termes, parmi bien d'autres (pouvez-vous faire la liste des réductions similaires ?).

Les théoriciens de la démonstration ne sont pas en reste, puisque la déduction naturelle doit inclure une réduction correspondante pour bénéficier de la propriété de la sous-formule. Cette réduction fait partie de celles que l'on nomme « coupures commutatives ».

La solution alternative que l'on avait présentée passe par un statut plus fondamental accordé aux contextes. Ce nouveau cadre, on l'a vu, s'adapte mieux aux techniques d'orthogonalité. Mais on verra qu'il permet aussi de simplifier la notation en résolvant en particulier le problème des coupures commutatives, et plus généralement en permettant un meilleur traitement des connecteurs positifs, ces parents pauvres de la déduction naturelle.

1.1 Termes, contextes et commandes

L'idée des « machines » est qu'on ne réduit jamais une expression isolée, mais seulement conjointement avec un contexte. On donne à ce contexte un statut à la fois formel et davantage primitif que la notion d'« expression à trou » ci-dessus :

- les contextes sont définis par la grammaire :

$$E ::= \star \mid \pi_1 \cdot E \mid \pi_2 \cdot E \mid (u|v) \cdot E \mid u \cdot E$$

où \star est un contexte vide que l'on peut aussi voir comme une variable de contexte (co-variable),

- les « machines », que l'on appelle *commandes* et que l'on note c , sont les couples :

$$c ::= \langle t \mid E \rangle$$

- les expressions, enfin, sont donnés par la grammaire :

$$t, u ::= x \mid (t, u) \mid (1, t) \mid (2, t) \mid \lambda x. t \mid () \mid c^*$$

où c^* représente une expression définie par *adjonction* : c'est l'expression qui, dans le contexte E , se réduit en c dans lequel on a substitué E pour \star .

De façon purement informelle, et malgré que la grammaire ne souffre d'aucune ambiguïté, on trouve utile d'écrire $|E\rangle$ pour indiquer que E est un contexte et $\langle t|$ pour indiquer que t est une expression.

Les règles de réduction des commandes se divisent en deux catégories.

- Les réduction *principales* sont responsables de la désagrégation mutuelle des expressions et des contextes :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x. t \mid u \cdot E \rangle &\rightarrow \langle t [u/x] \mid E \rangle \\ \langle (t, u) \mid \pi_1 \cdot E \rangle &\rightarrow \langle t \mid E \rangle \\ \langle (t, u) \mid \pi_2 \cdot E \rangle &\rightarrow \langle u \mid E \rangle \\ \langle (1, t) \mid (u|v) \cdot E \rangle &\rightarrow \langle u \mid t \cdot E \rangle \\ \langle (2, t) \mid (u|v) \cdot E \rangle &\rightarrow \langle v \mid t \cdot E \rangle. \end{aligned}$$

La réduction *adjointe* réduit les c^* comme expliqué ci-dessus :

$$\langle c^* \mid E \rangle \rightarrow c [E/\star].$$

C'est, en fait, une règle qui en regroupe beaucoup d'autres :

$$\begin{aligned} \langle \langle t \mid \pi_1 \cdot \star \rangle^* \mid E \rangle &\rightarrow \langle t \mid \pi_1 \cdot E \rangle \\ \langle \langle t \mid \pi_2 \cdot \star \rangle^* \mid E \rangle &\rightarrow \langle t \mid \pi_2 \cdot E \rangle \\ \langle \langle t \mid (u|v) \cdot \star \rangle^* \mid E \rangle &\rightarrow \langle t \mid (u|v) \cdot E \rangle \\ \langle \langle t \mid u \cdot \star \rangle^* \mid E \rangle &\rightarrow \langle t \mid u \cdot E \rangle \end{aligned}$$

Les règles d'élimination n'étaient donc pas présentées dans la syntaxe, puisqu'elles peuvent être définies :

$$\begin{aligned} \pi_1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle t \mid \pi_1 \cdot \star \rangle^* \\ \pi_2(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle t \mid \pi_2 \cdot \star \rangle^* \\ \text{match } t \text{ with } [u|v] &\stackrel{\text{def}}{=} \langle t \mid (u|v) \cdot \star \rangle^* \\ t u &\stackrel{\text{def}}{=} \langle t \mid u \cdot \star \rangle^*. \end{aligned}$$

Remarque 1. Le choix de terminologie « *adjoint* », inspiré de Girard [Gir06, p.194] vient du fait que la fonction qui effectue la première projection peut être vue comme l'adjointe du contexte correspondant : $\langle \pi_1^*(t) \mid E \rangle \rightarrow \langle t \mid \pi_1 \cdot E \rangle$; etc. pour chaque règle d'élimination. Il ne faut pas confondre cela avec la notion catégorielle d'adjonction telle qu'elle peut être utilisée en sémantique dénotationnelle.

Exemple 2. Revenons à l'exemple problématique du début, qui possède maintenant une réduction vers la forme souhaitée :

$$\begin{aligned} \langle \text{match}(\lambda x.(1, t))u \text{ with } [v|w] \mid E \rangle &\rightarrow \langle (\lambda x.(1, t))u \mid (v|w) \cdot E \rangle \\ &\rightarrow \langle \lambda x.(1, t) \mid u \cdot (v|w) \cdot E \rangle \\ &\rightarrow \langle (1, t [u/x]) \mid (v|w) \cdot E \rangle \\ &\rightarrow \langle v \mid t [u/x] \cdot E \rangle \end{aligned}$$

De plus, cette réduction s'effectue *en tête*, c'est-à-dire que l'on n'a besoin d'appliquer \rightarrow que sur la commande la plus externe.

1.2 Calcul des séquents

Comme on l'a vu la dernière fois, cette représentation du calcul est reliée au calcul des séquents de Gentzen [Gen35], selon le schéma suivant :

- une expression est typée sous le jugement suivant :

$$\Gamma \vdash t : A$$

(« t est une preuve de A sous les hypothèses Γ »). Γ est une liste $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ d'hypothèses nommées.

- un contexte est typé sous le jugement :

$$\Gamma \mid E : A \vdash \star : B$$

(« le contexte E réfute A , ou alors aboutit à une conclusion B , sous les hypothèses Γ »).

- les commandes sont typées par le jugement :

$$\langle t \mid E \rangle : (\Gamma \vdash \star : B)$$

- les règles d'introduction droite du calcul des séquents construisent les expressions, tandis que celles d'introduction gauche construisent les contextes, tel que décrit par le tableau suivant :

	introduction droite	introduction gauche
hypothèse	$\overline{\Gamma, x : A \vdash x : A}$	$\overline{\Gamma \mid \star : A \vdash \star : A}$
coupure	$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \mid E : A \vdash \star : B}{\langle t \mid E \rangle : (\Gamma \vdash \star : B)}$	
adjoint	$\frac{c : (\Gamma \vdash \star : B)}{\Gamma \vdash c^* : B}$	
\wedge	$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash u : B}{\Gamma \vdash (t, u) : A \wedge B}$	$\frac{\Gamma \mid E : A \vdash C \quad \Gamma \mid E : B \vdash C}{\Gamma \mid \pi_1 \cdot E : A \wedge B \vdash C \quad \Gamma \mid \pi_2 \cdot E : A \wedge B \vdash C}$
\vee	$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash (1, t) : A \vee B}$ $\frac{\Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash (2, t) : A \vee B}$	$\frac{\Gamma \mid E : C \vdash \star : D \quad \Gamma \vdash t : A \rightarrow C \quad \Gamma \vdash u : B \rightarrow C}{\Gamma \mid (t \mid u) \cdot E : A \vee B \vdash \star : D}$
\rightarrow	$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x. t : A \rightarrow B}$	$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \mid E : B \vdash \star : C}{\Gamma \mid t \cdot E : A \rightarrow B \vdash \star : C}$
\forall^2	$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash t : \forall X A} \quad X \notin \mathcal{FV}(\Gamma)$	$\frac{\Gamma \mid E : A[B/X] \vdash \star : C}{\Gamma \mid E : \forall X A \vdash \star : C}$
\top	$\overline{\Gamma \vdash () : \top}$	
\perp		$\overline{\Gamma \mid \star : \perp \vdash \star : A}$

La réduction des commandes définit alors un protocole d'élimination des coupures. (On pourra définir une coupure, dans notre syntaxe, comme étant une commande $\langle t \mid e \rangle$ dans laquelle t n'est pas une variable et e n'est pas \star .¹)

On peut alors faire une analogie entre les réduction principales et des cas *clés* ou principaux d'élimination des coupures, tandis que les réductions adjointes correspondent à des cas de commutation (mais en réalité les réduction principales cachent aussi des cas de commutation).

2 De la machine abstraite au calcul L

2.1 Exemple : problème de la règle de la disjonction

La règle d'introduction gauche de la disjonction ci-dessus fait tâche :

$$\frac{\Gamma \mid E : C \vdash \star : D \quad \Gamma \vdash t : A \rightarrow C \quad \Gamma \vdash u : B \rightarrow C}{\Gamma \mid (t \mid u) \cdot E : A \vee B \vdash \star : D}$$

1. Selon une convention suggérée originellement par Wadler [Wad03].

Cette règle est celle de la déduction naturelle, dont nous avons déjà discuté les défauts (présence d'un C intermédiaire), alors que le calcul des séquents donne la règle suivante :

$$\frac{\Gamma, A \vdash D \quad \Gamma, B \vdash D}{\Gamma, A \vee B \vdash D}$$

La symétrie du calcul des séquents, et en particulier celle entre la conjonction et la disjonction, suggère la règle suivante pour l'introduction gauche de la disjonction, qui ressemble à la règle droite de la conjonction :

$$\frac{\Gamma \mid E : A \vdash \star : D \quad \Gamma \mid E' : B \vdash \star : D}{\Gamma \mid (E \mid E') : A \vee B \vdash \star : D}$$

Cela suggère donc, de fait, d'ajouter un nouveau constructeur de contextes $(E \mid E')$ avec les nouvelles réduction, que l'on devine par symétrie :

$$\begin{aligned} \langle (1, t) \mid (E_1 \mid E_2) \rangle &\rightarrow \langle t \mid E_1 \rangle \\ \langle (2, t) \mid (E_1 \mid E_2) \rangle &\rightarrow \langle t \mid E_2 \rangle \end{aligned}$$

Cependant, il manque encore un ingrédient pour émuler la construction `match t with [u|v]` (dans un contexte E'), ou encore le contexte correspondant $(u \mid v) \cdot E'$. En effet, le constructeur $(E \mid E')$ ci-dessus permet de simuler le choix d'une branche, mais il reste à trouver des contextes E_1 et E_2 qui permettent le passage de t en argument comme `match t with [u|v]` le fait. C'est-à-dire des contextes tels que :

$$\begin{aligned} \langle t \mid E_1 \rangle &\rightarrow \langle u \mid t \cdot E' \rangle \\ \langle t \mid E_2 \rangle &\rightarrow \langle v \mid t \cdot E' \rangle \end{aligned}$$

L'ingrédient manquant est une construction de contextes qui est symétrique à l'« adjoint » déjà donné pour les expressions.

2.2 Enter μ

Les deux contextes que l'on souhaite représenter dans notre calcul, E_1 et E_2 , associent respectivement à une expression $\langle t \mid$ quelconque les commandes $\langle u \mid t \cdot E' \rangle$ et $\langle v \mid t \cdot E' \rangle$, soit dans une notation « ensembliste » informelle :

$$\begin{aligned} \mid E_1 \rangle : x &\mapsto \langle u \mid x \cdot E' \rangle \\ \mid E_2 \rangle : x &\mapsto \langle v \mid x \cdot E' \rangle \end{aligned}$$

Dans le λ calcul, la fonction qui à tout x associe $t(x)$ est notée $\lambda x.t$ avec x lié dans t . De la même manière, on introduit un lieu (qu'on appellera μ) pour écrire de tels contextes. On note donc $\mid \mu x.c \rangle$, avec x lié dans μ , l'environnement qui à tout $\langle t \mid$ associe la commande $c[t/x]$:

$$\langle t \mid \mu x.c \rangle \rightarrow c[t/x]$$

Il s'agit en quelque sorte d'un symétrique à l'adjoint c^* , qu'on peut voir comme une expression qui à tout contexte $|E\rangle$ associe la commande $c[E/\star]$, ou encore :

$$\langle c^* | : \star \mapsto c$$

(Vous vous en doutez, cela suggère que l'on note de façon symétrique $\langle c^* |$ comme un lieu $\langle \mu \star . c |$; on y reviendra en section 3.)

2.2.1 Lien entre les contextes et les expressions à trou

Il existe une motivation générique pour introduire le $|\mu x.c\rangle$: l'admettre, cela revient à demander une propriété de complétude de la grammaire des contextes vis-à-vis de la notion de contexte qu'on peut d'ores-et-déjà exprimer avec des expressions à trou.

En effet, la motivation pour introduire la catégorie grammaticale $|E\rangle$ était de réifier la notion de contexte qui découle des « expressions avec trou », avec l'idée que la commande $\langle t | E \rangle$ correspond au fait de substituer t pour le « trou » de E .

Or, même si la grammaire pour E ne nous permet pas de trouver des contextes adéquats en l'absence du lieu μ , il existe bien de tels contextes en tant qu'expressions avec trou : prendre $\langle u [] | E' \rangle^*$ (lire : u appliqué à $[]$) et $\langle v [] | E' \rangle^*$ respectivement pour E_1 et pour E_2 . Il manque seulement un moyen de notation pour exprimer leur présence.

(Réciproquement, même si x est lié non linéairement, $|\mu x.\langle t | E \rangle\rangle$ correspond à une expression à trou. Il suffit de considérer un lieu « let... in » :

$$\text{let } x = [] \text{ in } \bar{E}[t]$$

qui dans le lambda-calcul existe sous la forme de $(\lambda x.\bar{E}[t])[]$ – pour \bar{E} une expression à trou correspondant à E .)

2.2.2 Le problème de l'ordre de réduction

La règle de réduction du μ :

$$\langle t | \mu x.c \rangle \rightarrow c[t/x]$$

entre en conflit avec celle de c^* :

$$\langle c^* | E \rangle \rightarrow c[E/\star]$$

puisqu'admettre $\mu x.c$ dans la grammaire de E mène à une paire critique. Par exemple dans :

$$\langle t u | \mu x.\langle v | \star \rangle \rangle$$

qu'on peut lire comme le programme :

$$\text{let } x = t u \text{ in } v .$$

Pour coller à la sémantique en appel par nom de notre langage, nous devons permettre la réduction en :

$$\langle v [t u/x] | \star \rangle$$

et interdire celle en :

$$\langle t | u \cdot \mu x. \langle v | \star \rangle \rangle$$

qui procède à l'évaluation de t avant celle de v (ce qui n'est pas ce que l'on souhaite).

Donc, $\mu x.c$ n'est pas un E comme les autres ! On désignera par e les contextes qui sont soit des E , soit des $\mu x.c$:

$$e ::= E | \mu x.c$$

et on permet des contextes forme $(e|e')$:

$$E ::= \star | \pi_1 \cdot E | \pi_2 \cdot E | (e|e) | u \cdot E$$

Ce qui nous permet de considérer :

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= |\mu x. \langle u | x \cdot E' \rangle\rangle \\ |e_2\rangle &= |\mu x. \langle v | x \cdot E' \rangle\rangle. \end{aligned}$$

2.2.3 Justification à travers la linéarité

contexte e	linéaire pour la réécriture	expression avec trou	non focalisé
contexte E	linéaire pour la logique linéaire	pile / observable	focalisé

Les contextes E sont une généralisation des piles des machines de Krivine, et une expression t dans une commande $\langle t | E \rangle$ est en position de tête, si on se réfère à la terminologie du λ calcul. Cette notion qui détermine à quel moment un terme peut être réduit correspond à la linéarité de E pour la logique linéaire.

Un contexte e est linéaire au sens de la réécriture, mais pas nécessairement du point de vue de la logique linéaire. Ainsi, l'expression t dans $\langle t | \mu x. \langle u x | \star \rangle \rangle$ n'est pas en position de tête (cela reviendrait à demander que t soit en tête dans le λ -terme $(\lambda x. u x) t$).

La différenciation de E et $\mu x.c$ par les règles de réduction est donc justifiée en particulier par une dénotation en logique linéaire différente.

L'étude de la focalisation généralise cette différenciation en mettant en évidence une notion d'*observable* (preuve focalisée) dans les calculs des séquents classiques, linéaires ou intuitionnistes. En appel par nom, les contextes linéaires E , auxquels les machines de Krivine se restreignent, ne sont effectivement que ceux qui sont observables, à travers l'interaction, du point de vue des expressions.

2.3 Qu'y a-t-on gagné ?

2.3.1 Décomposition de l'élimination de la disjonction

Nous sommes arrivés à une décomposition de $(u|v) \cdot E$:

$$(u|v) \cdot E \stackrel{\text{def}}{=} (\mu x. \langle u | x \cdot E \rangle | \mu x. \langle v | x \cdot E \rangle),$$

et par conséquent on remplace $\text{match } \dots \text{ with } [\dots]$ par une définition directe :

$$\text{match } t \text{ with } [u|v] \stackrel{\text{def}}{=} \langle t | (\mu x. \langle u | x \cdot \star \rangle | \mu x. \langle v | x \cdot \star \rangle) \rangle^*$$

Vous l'avez compris, cette nouvelle définition vérifie bien :

$$\begin{aligned} \langle (1, t) | (u|v) \cdot E \rangle &= \langle (1, t) | (\mu x. \langle u | x \cdot E \rangle | \mu x. \langle v | x \cdot E \rangle) \rangle \\ &\rightarrow \langle t | \mu x. \langle u | x \cdot E \rangle \rangle \\ &\rightarrow \langle u | t \cdot E \rangle \end{aligned}$$

ainsi que, de façon similaire :

$$\langle (2, t) | (u|v) \cdot E \rangle \rightarrow^2 \langle v | t \cdot E \rangle.$$

2.3.2 Correspondance avec le calcul des séquents

Les nouvelles constructions appellent de nouvelles règles de typage :

$$\frac{c : (\Gamma, x : A \vdash \star : B)}{\Gamma | \mu x. c : A \vdash \star : B} \qquad \frac{\Gamma | e : A \vdash \star : C \quad \Gamma | e' : B \vdash \star : C}{\Gamma | (e|e') : A \vee B \vdash \star : C}$$

La règle de gauche s'appelle l'*activation*. La première chose à remarquer avec cette nouvelle règle est qu'elle possède une règle inverse, la *désactivation*, dérivable à partir de la coupure et de la règle axiome :

$$\frac{\Gamma | e : A \vdash \star : B}{\langle x | e \rangle : (\Gamma, x : A \vdash \star : B)}.$$

Par ailleurs, tout comme la règle d'adjoint, elle correspond à zéro étape de dérivation sur le séquent sous-jacent. Remarquer en outre que l'activation suivie d'une désactivation est équivalent à ne rien faire :

$$\langle x | \mu x. c \rangle \rightarrow c.$$

(Il sera donc naturel de demander l'analogie pour une désactivation suivie d'une activation, sous la forme d'une règle « η » :

$$\mu x. \langle x | e \rangle \simeq_{\eta} e)$$

Ces nouvelles règles nous donnent la correspondance avec le calcul des séquents annoncé.

Exercice 3. Dériver la règle originale ci-dessous à partir de la définition donnée plus haut :

$$\frac{\Gamma | E : C \vdash \star : D \quad \Gamma \vdash t : A \rightarrow C \quad \Gamma \vdash u : B \rightarrow C}{\Gamma | (t|u) \cdot E : A \vee B \vdash \star : D}$$

2.3.3 Disparition des coupures commutatives

Les coupures commutatives en déduction naturelle sont des règles de commutation locales qui permettent de ramener les redexs vers le sommet de la preuve. Ce sont des réductions fastidieuses à énoncer mais nécessaires en présence de connecteurs positifs tels que la disjonction ou la conjonction. Sans cela, la déduction naturelle munie des connecteurs positifs n'a pas la propriété de la sous-formule (voir [Gir06], page 91).

Par exemple :

$$\frac{C \quad \frac{\frac{\vdots}{A \vee B} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{[A]}{C \rightarrow D}}{C \rightarrow D}}{C \rightarrow D}}{D}}{D}}{D}$$

se réduira en :

$$\frac{A \vee B \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{C} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{[A]}{C \rightarrow D}}{D}}{D}}{D}}{D} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{C} \quad \frac{\frac{\frac{\vdots}{[B]}{C \rightarrow D}}{D}}{D}}{D}}{D}}{D}}{D}}{D}$$

Il y a bien sûr toutes les variantes : la conclusion $C \rightarrow D$, et la règle d'élimination correspondante, peuvent faire intervenir d'autres connecteurs que l'implication.

Dans notre syntaxe, comme on a vu, une telle règle n'est pas essentielle à la réduction de tête, puisque pour la première dérivation on a :

$$\langle (\text{match } x \text{ with } [\lambda y. t \mid \lambda y. u]) \ z \mid \star \rangle \rightarrow^* \langle x \mid (\lambda y. t \mid \lambda y. u) \cdot z \cdot \star \rangle$$

tandis que pour la seconde on a :

$$\langle \text{match } x \text{ with } [\lambda y. t \ z \mid \lambda y. u \ z] \mid \star \rangle \rightarrow^* \langle x \mid (\lambda y. t \ z \mid \lambda y. u \ z) \cdot \star \rangle$$

En revanche, on pourrait penser que l'on a simplement troqué un problème pour un autre similaire, puisque l'on voudrait alors réduire le contexte $(\lambda x. t \mid \lambda y. u) \cdot z \cdot \star$ en le contexte $(\lambda x. t \ z \mid \lambda y. u \ z) \cdot \star$.

Cependant, grâce à la décomposition de $(t \mid u) \cdot E$ donnée plus haut, ce n'est pas nécessaire. En effet, les deux commandes précédentes se réduisent en la même commande (exercice) :

$$\langle x \mid (\mu x. \langle t \mid z \cdot \star \rangle \mid \mu x. \langle u \mid z \cdot \star \rangle) \rangle.$$

Cette façon de résoudre le problème des coupures commutatives est similaire à ce qui se passe en calcul des séquents ou avec les réseaux de preuves. En quelques sorte, le calcul L transpose au niveau des langages de termes les bonnes propriétés du calcul des séquents.

2.3.4 Rapprochement avec la description catégorielle

Après Selinger [Sel01] notamment, on a compris l'importance de la dualité catégorique (l'inversion du sens des morphismes) pour les modèles du calcul. En effet, dans le cas de la logique classique, la dualité relie la logique classique interprétée en appel par nom avec celle interprétée en appel par valeur.

Du point de vue du calcul des séquents, cela correspond au fait que le fragment négatif de la logique classique est le symétrique du fragment positif. Il est remarquable (en anticipant un peu, puisque l'on n'a pas encore parlé de polarités) que cette dualité puisse se refléter dans la notation des termes : le passage à la catégorie duale correspond à l'échange mutuel de la syntaxe des expressions et de la syntaxe des contextes [CH00, Wad03]. Pour obtenir cette symétrie, l'introduction du $\mu x.c$ dans la syntaxe des contextes est nécessaire.

On peut donc s'attendre à ce que la nouvelle notation soit davantage transparente vis-à-vis de la description algébrico-catégorielle de la sémantique.

2.3.5 *Focusing* vs. focalisation

Dans le domaine de la recherche de preuve, le *focusing* donne des contraintes de linéarité qu'on peut imposer à un système de preuve pour réduire l'espace de recherche. On peut l'accepter comme une description statique d'un phénomène plus général de la logique (classique, linéaire, ou intuitionniste) portant sur le comportement calculatoire des preuves : la focalisation (voir Section 2.2.3). Le *focusing* correspond à l'effet de la focalisation sur les preuves sans coupures.

Le *focusing* impose une restriction en termes d'expressivité : le système original ne se retrouve qu'à travers une traduction par double négation, non modulaire, de même nature que les traductions CPS en informatique.²

Le calcul L montre qu'il est possible, sans perte de concision, de rendre compte de la focalisation sous sa forme dynamique : c'est-à-dire en faisant porter les restrictions sur les règles de réduction plutôt que sur les règles du calcul des séquents [Mun09]. C'est-ce que l'on fait avec tous les calculs que l'on présente ici, qui implémentent à des degrés divers la focalisation. À la différence du *focusing*, puisqu'on peut représenter les preuves non focalisées, cette façon de faire n'altère pas l'expressivité logique du calcul.

Il est intéressant de remarquer que décrire la focalisation avec une syntaxe de termes aide aussi à comprendre le *focusing*. En effet, d'un système formulé dans L, on en déduit facilement la forme particulière des séquents sans coupures³.

2. Bien que ce soit la focalisation qui est à l'œuvre dans les deux cas, la restriction est donc d'une toute autre nature que celle de la machine de Krivine, qui se restreint aux contextes observables que sont les piles. En effet, elles peuvent le faire sans perte de généralité dans la dénotation des expressions : comme on l'a vu, les contextes e « omis » restent présents sous la forme d'expressions à trou.

3. Et η -expansés, selon la variante du *focusing*.

3 Logique classique

3.1 Rappels sur le calcul des séquents classique

Le cadre ci-dessus est intuitionniste, mais tout est prêt pour pouvoir faire de la logique classique.

Une logique classique sera, pour nous, un système qui possède une certaine symétrie (explicite ou implicite), suffisante pour procéder au raisonnement par contraposée. On suppose aussi la possibilité de dupliquer ou d'oublier une hypothèse, ce qui permet de mettre de côté de le cas de la logique linéaire.

En calcul des séquents, le système duquel on partira est le système LK introduit par Gentzen [Gen35]. La logique classique est représentée avec des séquents à plusieurs conclusions :

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$$

Ce séquent correspond à la proposition $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$, le séquent vide \vdash correspondant en particulier à l'antinomie Vrai \rightarrow Faux.

Négation Les règles de la négation sont symétriques :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} (\neg \vdash) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} (\vdash \neg)$$

Ces règles donnent en particulier l'introduction et l'élimination de la double négation :

$$\Gamma, A \vdash \neg \neg A, \Delta \qquad \Gamma, \neg \neg A \vdash A, \Delta$$

Règles structurelles Dans la tradition héritée de la logique linéaire, on trouve plus naturel d'écrire les règles de duplication et d'oubli des hypothèses de façon explicite à travers les règles structurelles de contraction et d'affaiblissement :

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} (c \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} (w \vdash)$$

En conséquence, on écrit le calcul des séquents dans le style *multiplicatif*⁴ :

$$\frac{}{A \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

4. C'est un enseignement général de la logique linéaire que la formulation « additive » du calcul des séquents cache les règles structurelles. Plus précisément, l'utilisation d'une hypothèse pouvait être dédoublée à travers la dérivation suivante :

$$\frac{\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \quad \Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} .$$

La règle d'hypothèse du système précédent, par ailleurs, cache la non-utilisation d'hypothèses. En effet, on peut montrer par récurrence que d'une dérivation de $\Gamma \vdash B$, on peut construire une dérivation de $\Gamma, A \vdash B$, en modifiant les règles axiomes de la façon appropriée.

Ce traitement peut légitimement sembler plus naturel dans certains cadres. Cependant, le style additif masque le quotient effectué par la syntaxe des termes sur les commutations de règles structurelles.

Remarquer que l'élimination de la double négation et les règles structurelles ($c \vdash$) et ($w \vdash$) entraînent les règles symétriques :

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ (} \vdash c \text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{ (} \vdash w \text{)}$$

Constante pour faux On souhaite donner la négation avec le codage $\neg A = A \rightarrow \perp$.

Exercice 4. Montrer que les règles de la négation ci-dessus s'obtiennent avec ce codage pourvu que l'on dispose d'une constante \perp qui vérifie les règles suivantes :

$$\frac{}{\perp \vdash} \text{ (} \perp \vdash \text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \perp, \Delta} \text{ (} \vdash \perp \text{)}$$

La règle de droite peut être obtenue avec l'affaiblissement à droite, mais pour la règle de gauche, le codage du système $F \perp \stackrel{?}{=} \forall X X$ (que l'on a utilisé implicitement à la section précédente) ne suffit pas : tout au plus donne-t-il $\vdash \perp \rightarrow A$. Le « faux » du système F est donc moins fort que le séquent vide, dans le sens où il n'y a pas d'opération inverse à l'affaiblissement :

$$\frac{\vdash}{\vdash \perp} .$$

On introduira donc pour la règle ($\perp \vdash$) une constante spécifique dans la syntaxe des contextes.

3.2 Calcul L avec plusieurs conclusions

La logique classique s'obtient dans L en ajoutant des *co-variables*, que l'on note $\alpha, \beta, \gamma \dots$, qui viennent remplacer \star dans la syntaxe des contextes. La forme générale des jugements de commande se généralise en :

$$c : (x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash \alpha_1 : B_1, \dots, \alpha_m : B_m),$$

pour faire écho à la forme symétrique du séquent plus haut. (On notera en général $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ et $\Delta = \alpha_1 : B_1, \dots, \alpha_m : B_m$.⁵)

En effet, bien que l'application d'un affaiblissement peut être anticipé et celle d'une contraction retardée, la preuve « canonique » est celle où l'affaiblissement survient le plus tard et la contraction le plus tôt (donc le contraire de ce que propose le style additif). En particulier, c'est sous cette forme que les applications superflues d'une contraction sur une formule provenant d'un affaiblissement :

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A, A \vdash \Delta}}{\Gamma, A \vdash \Delta}$$

s'éliminent. Cela permet de comprendre pourquoi la syntaxe de terme, qui quotiente modulo les commutations de règles structurelles, ne représente pas de telles dérivations superflues.

5. Formellement, ce sont des fonctions partielles de l'ensemble des variables ou des co-variables dans l'ensemble des formules.

Le jugement des expressions est :

$$\Gamma \vdash t : A \mid \Delta$$

qui est symétrique à celui des contextes :

$$\Gamma \mid e : A \vdash \Delta.$$

Il faut rajouter un lieu $\langle \mu\alpha.c \mid$ qui crée un terme en liant α dans c .

$$\begin{aligned} t, u &::= x \mid (t, u) \mid (1, t) \mid (2, t) \mid \lambda x. t \mid () \mid \mu\alpha.c \\ E &::= \alpha \mid \pi_1 \cdot E \mid \pi_2 \cdot E \mid (e \mid e') \mid u \cdot E \mid \text{tp} \\ e &::= E \mid \mu x. c \end{aligned}$$

C'est une généralisation de « l'adjoint » c^* (qui correspond au lieu $\mu\star.c$) :

$$\langle \mu\alpha.c \mid E \rangle \rightarrow c [E/\alpha]$$

Soit, vu comme une fonction du contexte :

$$\langle \mu\alpha.c \mid : \alpha \mapsto c$$

On arrive aux règles de dérivation Fig. 1.

3.3 Exemple : le λ_c de Krivine

Les termes de L peuvent à la fois être vus comme des dérivations de typage ou comme des spécifications de règles de réduction pour la machine abstraite. Cette dualité signifie qu'il y a deux façon d'aborder de nouveaux opérateurs : ou bien du point de vue des preuves, ou bien du point de vue des réductions.

Prenons l'exemple des opérateurs k_E et α de Krivine :

$$\begin{aligned} \langle k_E \mid t \cdot E' \rangle &\rightarrow \langle t \mid E \rangle \\ \langle \alpha \mid t \cdot E \rangle &\rightarrow \langle t \mid k_E \cdot E \rangle \end{aligned}$$

$$\vdash \alpha : ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

On aurait pu partir de la preuve en calcul des séquents de la loi de Peirce pour obtenir une définition de α dans L, avec l'espoir que l'on retrouve les règles de réduction ci-dessus. On propose⁶ de faire l'inverse : partir des règles de réduction pour en déduire les termes.

6. Comme dans [CM10].

	introduction droite	introduction gauche
axiome	$\overline{x : A \vdash x : A}$	$\overline{ \alpha : A \vdash \alpha : A}$
coupure	$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid e : A \vdash \Delta'}{\langle t \mid e \rangle : (\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta')}$	
activation	$\frac{c : (\Gamma \vdash \alpha : B, \Delta)}{\Gamma \vdash \mu \alpha. c : B \mid \Delta}$	$\frac{c : (\Gamma, x : A \vdash \Delta)}{\Gamma \mid \mu x. c : A \vdash \Delta}$
contraction ^a	$\frac{p : (\Gamma \vdash \alpha : A, \beta : A, \Delta)}{p [\alpha/\beta] : (\Gamma \vdash \alpha : A, \Delta)} \text{ } (^{\vdash c})$	$\frac{p : (\Gamma, x : A, y : A \vdash \Delta)}{p [x/y] : (\Gamma, x : A \vdash \Delta)} \text{ } (^{c\vdash})$
affaiblissement ^b	$\frac{p : (\Gamma \vdash \Delta)}{p : (\Gamma \vdash \alpha : A, \Delta)} \text{ } (^{\vdash w})$	$\frac{p : (\Gamma \vdash \Delta)}{p : (\Gamma, x : A \vdash \Delta)} \text{ } (^{\vdash w})$
\wedge	$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma \vdash u : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash (t, u) : A \wedge B \mid \Delta}$	$\frac{\Gamma \mid E : A \vdash \Delta}{\Gamma \mid \pi_1 \cdot E : A \wedge B \vdash \Delta}$ $\frac{\Gamma \mid E : B \vdash \Delta}{\Gamma \mid \pi_2 \cdot E : A \wedge B \vdash \Delta}$
\vee	$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta}{\Gamma \vdash (1, t) : A \vee B \mid \Delta}$ $\frac{\Gamma \vdash t : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash (2, t) : A \vee B \mid \Delta}$	$\frac{\Gamma \mid e : A \vdash \Delta \quad \Gamma \mid e' : B \vdash \Delta}{\Gamma \mid (e \mid e') : A \vee B \vdash \Delta}$
\rightarrow	$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B \mid \Delta}{\Gamma \vdash \lambda x. t : A \rightarrow B \mid \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta \quad \Gamma' \mid E : B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \mid t \cdot E : A \rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}$
\forall^2	$\frac{\Gamma \vdash t : A \mid \Delta}{\Gamma \vdash t : \forall X A \mid \Delta} \text{ } X \notin \mathcal{FV}(\Gamma)$	$\frac{\Gamma \mid e : A[B/X] \vdash \Delta}{\Gamma \mid e : \forall X A \vdash \Delta}$
\top	$\overline{\vdash () : \top}$	
\perp		$\overline{ \text{tp} : \perp \vdash}$

a. Avec l'abus de notation transparent selon lequel p représente c , e ou t , et où dans les deux derniers cas, une formule est activée.

b. Avec α, x non libre dans p (avec le même abus de notation que ci-dessus).

Table 1: Un fragment négatif du calcul L classique, hérité de [CH00, Wad03].

Écrivons la règle de réduction de k_E sous la forme de son action sur les piles :

$$\langle k_E \mid : x \xrightarrow{\lambda} (\alpha \xrightarrow{\mu} \langle x \mid E \rangle)$$

On en déduit directement une définition pour k_E :

$$k_E \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x. \mu \alpha. \langle x \mid E \rangle \quad (\alpha \text{ non libre dans } E).$$

De même pour α :

$$\langle \alpha \mid : x \xrightarrow{\lambda} (\alpha \xrightarrow{\mu} \langle k_\alpha \mid \alpha \rangle)$$

d'où :

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x. \mu \alpha. \langle k_\alpha \mid \alpha \rangle$$

En dériver le jugement de typage est un simple exercice :

Exemple 5. Établir les dérivations suivantes :

$$\frac{\Gamma \mid E : A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash k_E : A \rightarrow B, \Delta}$$

$$\vdash \alpha : ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

On pourra remarquer que la règle de k_E ne se formule qu'en calcul des séquents, tandis que celle de α peut se formuler en déduction naturelle.

On retrouve cette distinction qualitative à travers la notion de quasi-preuve dans les travaux de Krivine [Kri04] (une quasi-preuve ne doit pas contenir de sous-terme de la forme k_E). Se restreindre aux quasi-preuves est une façon parmi d'autres chez Krivine de construire un modèle à partir d'une structure de réalisabilité (donc passer des niveaux $-2/-3$ au niveau -1).

Références

- [CH00] Pierre-Louis Curien and Hugo Herbelin, *The duality of computation*, ACM SIGPLAN Notices **35** (2000), 233–243.
- [CM10] Pierre-Louis Curien and Guillaume Munch-Maccagnoni, *The duality of computation under focus*, Proc. IFIP TCS, 2010, Extended version.
- [Gen35] Gerhard Gentzen, *Untersuchungen über das logische schließen*, Mathematische Zeitschrift **39** (1935), 176–210, 405–431.
- [Gir06] Jean-Yves Girard, *Le point aveugle, cours de logique, tome i : Vers la perfection*, Vision des Sciences, Hermann, 2006.
- [Kri04] Jean-Louis Krivine, *Realizability in classical logic*, To appear in *Panoramas et synthèses*, Société Mathématique de France, 2004.

- [Mun09] Guillaume Munch-Maccagnoni, *Focalisation and classical realisability*, Proc. CSL '09, LNCS, Springer-Verlag, 2009.
- [Sel01] Peter Selinger, *Control categories and duality : On the categorical semantics of the lambda-mu calculus*, Math. Struct in Comp. Sci. **11** (2001), no. 2, 207–260.
- [Wad03] Philip Wadler, *Call-by-value is dual to call-by-name*, SIGPLAN Not. **38** (2003), no. 9, 189–201.